Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación
y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas III
CI-2523 Ene-Mar 2011

> La verdadera comprensión no está en el origen del átomo ni en las reglas de proporción, sino en aquello que casualmente estamos dirigidos y nos parece buen.
>
> Mi hermana y yo. Federico Nietzsche.

Tarea 1—Repaso para el examen Corto

NOMBRE CARNET NOTA

1. Se tiene n bolas negras, r bolas rojas y k cajas. Se desea colocar las bolas en las cajas, ¿ De cuántas formas distintas puede hacerse si:

   a) Las cajas y las bolas rojas son distinguible, las negras son indistinguibles y se quiere que haya a lo sumo una bola negra en cada caja?

   b) Las cajas y las bolas rojas son indistinguible, las bolas negras son distinguibles, se quiere que toda caja tenga alguna bola negra?

   c) Las cajas y las bolas son distinguibles, se quiere que las bolas negras ocupen exactamente m de las cajas y que cada caja tenga a lo sumo una bola roja?

   d) Bolas indistinguibles, cajas distinguibles, todas las bolas negras se deben colocar en una misma caja junto con m de las rojas de tal manera que estén ordenadas linealmente, y las bolas restantes en las restantes cajas sin que queden cajas vacías?

   e) Las cajas son indistinguibles, las bolas son distinguibles, toda caja debe tener al menos una bola de cada color y las bolas rojas en cada caja deben estar ordenadas linealmente—sin considerar a las negras?

   f) Las cajas y las bolas rojas son indistinguibles, las bolas negras son distinguibles. Toda caja debe tener al menos una bola negra y una roja, y las bolas negras en cada caja deben estar ordenadas circularmente?

   g) **Bono:** Como en *d* pero con las bolas rojas distinguibles?

2. Halle el valor de $\sum_{i=0}^{n} i$ expandiendo cada sumando adecuadamente para obtener un arreglo rectangular que represente la suma deseada y luego eligiendo el orden adecuado para relizar la suma.

3. Con los dígitos: $1, 2, \ldots, 9$ ¿cuántos números de k cifras $(a_1 a_2 \cdots a_k)$ se pueden hacer si $a_i \leq a_{i+1}$?

4. Demuestre combinatoriamente que si $x, y, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}} \ .$$

5. Demuestre combinatoriamente que:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

6. Use la fórmula de sumas superiores para hallar una fórmula cerrada para la suma: $\sum_{i=0}^{n} i^3$.

7. En una retícula de $m \times n$, cuántos de los caminos de la esquina inferior izquierda $(0,0)$ a la esquina superior derecha (m,n) no pasan por el punto de coordenadas (i,j) de la retícula. Sólo se permiten movimientos al este y al norte.

8. Si $x \neq 1$, obtenga el valor de la siguiente suma: $\sum_{i=1}^{n} i x^i$

   a) Usando el método de la perturbación.

   b) Escribiendola como una suma doble.

   c) Derivando una suma conocida.